

## Kaarten schudden

Na het schudden begint een kaartspel meestal met het gelijk verdelen van de kaarten onder een aantal spelers. Neem aan dat bij een bepaald spel 16 verschillende kaarten gelijk verdeeld worden onder vier spelers A, B, C en D. Spelers A, B, C en D krijgen ieder dus vier kaarten.

We bekijken een stapel kaarten bestaand uit 16 verschillende kaarten. Deze kaarten kunnen op circa  $2,1 \cdot 10^{13}$  verschillende volgordes liggen.

Het aantal volgordes waarin de kaarten kunnen liggen, is veel groter dan het aantal mogelijkheden om de kaarten onder de vier spelers A, B, C en D te verdelen.

4p 10 Bereken hoeveel keer zo groot dit aantal is. Rond af op tienduizendtallen.

In 1992 publiceerden de Amerikaanse wiskundigen Bayer en Diaconis een artikel over het schudden van kaarten. Voor dit artikel hadden zij de meest gebruikte manier van schudden onderzocht, de zogeheten **Riffle Shuffle** (zie de foto).

**foto**



Zij kwamen tot de conclusie dat het met deze schudtechniek niet mogelijk is een stapel kaarten écht willekeurig te maken, zoals bijvoorbeeld een computer dat wel kan.

Voor het spelen van een kaartspel is het goed genoeg als de kaarten “voldoende willekeurig” geschud zijn.

Bayer en Diaconis ontdekten tijdens hun onderzoek dat het aantal keren dat een stapel kaarten minstens geschud moet worden om als “voldoende willekeurig” bestempeld te worden, kan worden benaderd met de formule:

$$A = 1,5 \cdot 2 \log(n)$$

In deze formule is  $A$  het aantal keren dat een stapel van  $n$  kaarten minstens geschud moet worden om als “voldoende willekeurig” bestempeld te worden.  $A$  wordt naar boven afgerond op een geheel getal.

Het kaartspel **jokeren** wordt gespeeld met twee sets van 52 speelkaarten, aangevuld met in totaal 4 zogeheten **jokers**.

- 2p 11 Bereken hoe vaak de kaarten bij jokeren minstens geschud moeten worden volgens de formule van Bayer en Diaconis.

Als het aantal te schudden kaarten toeneemt, neemt ook het aantal keren dat er minstens geschud moet worden toe. Dit aantal neemt echter steeds langzamer toe. Je kunt dit zien aan de afgeleide  $\frac{dA}{dn}$ .

- 4p 12 Stel de formule op van de afgeleide  $\frac{dA}{dn}$  en beredeneer aan de hand van deze formule, dus zonder getallen in te vullen of een schets te maken, dat  $A$  afnemend stijgend is.

In de meeste casino's kun je het spel **blackjack** spelen. Dat wordt over het algemeen gespeeld met vier spellen kaarten (totaal 208 kaarten). Het aantal keer dat zo'n groot aantal kaarten minstens geschud moet worden is helemaal niet zo groot: volgens de formule van Bayer en Diaconis slechts 12 keer. Dat is maar drie keer schudden meer dan bij één spel kaarten.

Volgens de formule van Bayer en Diaconis geldt in het algemeen: als het aantal kaarten vier keer zo groot wordt, hoeft er maar drie keer extra geschud te worden.

- 4p 13 Toon dit aan met behulp van de formule voor  $A$  en de rekenregels voor logaritmen zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden.